D'où $U_{n+1} \le U_n$ et par suite (U_n) est une suite décroissante

Conclusion :

(U_n) est une suite décroissante et minorée par α donc c'est une suite convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in [\alpha, 1]$

c) D'après 3)b/ on a : f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in [0,1] : 0 \le f'(x) \le \frac{3}{4}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements Finis on a : $U_n \in [0,1], \alpha \in [0,1]$ donc sur $[\alpha, U_n]$

on a :

$$0 \le f(U_n) - f(\alpha) \le \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 0 \le U_{n+1} - \alpha \le \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$$

d) on a : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le U_{n+1} - \alpha \le \frac{3}{4}(U_n - \alpha)$

"Multiplions membre à membre "

$$\begin{cases} 0 \le U_1 - \alpha \le \frac{3}{4}(U_0 - \alpha) \\ \times\ 0 \le U_2 - \alpha \le \frac{3}{4}(U_1 - \alpha) \\ \times\ 0 \le U_3 - \alpha \le \frac{3}{4}(U_2 - \alpha) \\ \times\ \ \vdots \\ \ \ 0 \le U_n - \alpha \le \frac{3}{4}(U_{n-1} - \alpha) \end{cases}$$

$$= 0 \le U_n - \alpha \le \left(\frac{3}{4}\right)^n (U_0 - \alpha)$$

Donc $0 \le U_n - \alpha \le \left(\frac{3}{4}\right)^n U_0 - \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Et $\left(\frac{3}{4}\right)^n U_0 - \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n, (U_0 = 1)$

D'où : $0 \le U_n - \alpha \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Par suite : $\boxed{\alpha \le U_n \le \alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^n, \forall\, n \in \mathbb{N}}$

e) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn